

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut
Füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava

Natali Atamanova

Modifitseeritud teleparalleelse gravitatsiooniteooria uurimine dünaamiliste süsteemide meetodil

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Manuel Hohmann, PhD

Tartu 2021

Modifitseeritud teleparalleelse gravitatsiooniteooria uurimine dünaamiliste süsteemide meetodil

Lühikokkuvõte:

Käesolev töö uurib kosmoloogilisi võrrandeid, mis on saadud teleparalleelsest geometriast ja kuuluvad uue üldrelatiivsusteooria klassi. Võrrandite uurimine toimub dünaamiliste süsteemide meetodil. Töö teoreetiline osa keskendub tausta loomisele: tehakse ülevaade teleparalleelsest geometriast, tuuakse välja vajalikud kosmoloogilised võrrandid ning tutvustatakse kasutatud meetodit. Töö arvutuslikus osas toimub võrrandite teisendus sobivale kujule ja dünaamilise süsteemi avaldamine, nende lahendamine ning tulemuste tõlgendamine. Analüüsist selgub, et antud klassi teooriates leiduvad trajektoorid, mis sobivad universumi arengu kirjeldamiseks, kuid dünaamika on kvalitatiivselt sama, kui üldrelatiivsusteoorias ja ei paku uusi selgitusi vaatlustele.

Võtmesõnad:

teleparalleelne geomeetria, dünaamilised süsteemid, kosmoloogia

CERCS:

P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Modified teleparallel gravity theory analysis by dynamical systems method

Abstract:

In the following thesis a cosmological model is constructed on teleparallel geometry and new general relativity class of theories. The properties of the model are studied with the methods of dynamical systems. In the theoretical part of the work we give an overview of teleparallel geometry, bring in important equations from cosmology for analysis and introduce the most relevant concepts of dynamical systems. In the computational part of the work we derive a dynamical system from cosmological equations, find the principle of behavior of the solutions and analyze the results. We shall see that our models gives a correct behaviour of the solutions, but dynamics behave qualitatively the same as in general relativity.

Keywords:

Teleparallel gravity, dynamical systems, cosmology

CERCS:

P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

Sissejuhatus	5
Tähistused	5
1 Teleparalleelne geomeetria	6
1.1 Üldrelatiivsusteooria	6
1.1.1 Seostus ja kovariantne tuletis	6
1.1.2 Kõverus ja vääne	7
1.2 Tetraadformalism	8
1.3 Spinnseostus	10
2 Dünaamilised süsteemid	12
2.1 Põhimõisted	12
2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria	12
3 Kosmoloogia	14
3.1 Põhivõrrandid	14
3.2 Materia kui voolis	14
3.3 Kosmoloogilised võrrandid	15
3.4 Modifitseeritud kosmoloogilised võrrandid	16
4 Dünaamilise süsteemi analüüs	19
4.1 Dünaamilise süsteemi tuletamine	19
4.1.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)	19
4.1.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)	20
4.2 Süsteemi lahendamine	21
4.2.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)	21
4.2.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)	23
4.3 Tulemuste analüüs	24
4.3.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)	24
4.3.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)	25
5 Kokkuvõte	26
Viidatud kirjandus	27
II. Litsents	29

Sissejuhatus

Kosmoloogia on teadusharu, mis uurib universumi arengut ning universumit üldiselt. Vaatluste põhjal on kaasaegne füüsika jõudnud järeldusele, et universum on kiirenevalt paisuv, mis aga hetkel ei kajastu olemasoleva üldtunnistatud teooriaga - üldrelatiivsusteooriaga. Võimalike lahenduste hulka kuuluvad olemasolevate teooriate modifitseerimine ja uue mateeria tüübi sissetoomine - tume energia. Antud töös üritatakse esinenud probleem lahendada esimese meetmega.

Gravitatsiooniteooria modifitseerimisel suurem osa lähenemisviise põhinevad Levi-Civita seostusel ja kõverusel, kuid on olemas ka teistel geomeetrial põhinevaid lähenemisviise, nagu näiteks meetriline teleparalleelne esitusviis, mis kasutab kõveruse asemel väänet. Viimase esitusviisi kaudu on tuletatud töös uuritud kosmoloogilised võrrandid. [1]

Korralik gravitatsiooni teooria peaks jagama universumi ajatelje nelja perioodi: inflatsioon, kus toimub universumi kiirenev paisumine, kiirguse domineerimis periood, tolmu domineerimisperiood ja tume energia domineerimis periood.[2] Käesolev töö kontrollib, kas valitud modifitseeritud teooria sobib universumi arengu kirjeldamiseks.

Tähistused

Kasutame osatuletiste jaoks tähistusi

$$A_{\mu,\nu} := \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad A^\alpha{}_{,\mu\nu} := \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1)$$

ning kovariantse tuletise jaoks

$$A^\alpha{}_{;\nu} = A^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} A^\beta. \quad (2)$$

Käesolevas töös kasutame lühendid

üldrelatiivsusteooria	ÜRT
teleparalleelne gravitatsioon	TPG
Friedmanni - Lemaitre' - Robertsoni - Walkeri	FLRW

1 Teleparalleelne geomeetria

Peatükk annab lühiülevaate teleparalleelse geomeetria olemusest ja kasutatavatest suurustest alustades üldrelatiivsusteooria põhikontseptsioonide väljatoomisest.

1.1 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteooria (edaspidi ÜRT) osas keskendume tähtsamatel mõistetel, mida kasutame edaspidi teleparalleelse gravitatsiooni (edaspidi TPG) kirjeldamisel. Peatükk on koostatud allika [3] põhjal, kui just ei ole muud moodi viidatud.

1.1.1 Seostus ja kovariantne tuletis

Seoses ruumi mitte-tasasusega ehk kõverusega ei saa eeldada, et vektori suund jääb samaks selle nihutamisel. Seepärast defineeritakse seostus, mis võimaldab võrrelda vektoreid ruumi eri punktides. Vaatleme vektori muutust tingimusel, et vektor jääb paralleelseks. Vaatleme vektori komponentide muutust paralleelnihkel.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi^j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^{k'}}{dt} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^{k'}} \right) = \frac{d^2 x^{k'}}{dt^2} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} \frac{dx^{k'}}{dt} \frac{dx^{l'}}{dt} = 0 \quad \left| \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial \xi^j} \right.$$

Ehk

$$\frac{d^2 x^{k'}}{dt^2} + \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^{l'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial \xi^i} \frac{dx^{l'}}{dt} \frac{dx^{i'}}{dt} = 0,$$

millest afiinseks (lineaarseks) seostuseks $\Gamma^{k'}_{l'i'}$ nimetatakse suurust

$$\Gamma^{k'}_{l'i'} = \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^{l'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial \xi^j}. \quad (3)$$

Vajame tuletise eeskirja üldistuse, et vektoriaalsed suurused teiseneksid kui tensorid. Antud üldistuseks on kovariantne tuletis, mis avaldub seostuse kaudu:

$$A^\alpha_{;\nu} = A^\alpha_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} A^\beta. \quad (4)$$

1.1.2 Kõverus ja vääne

Kõveruse ja väände saab defineerida kovariantse tuletise kommutaatori kaudu ehk [3]

$$[A_{\lambda;\mu\nu} - A_{\lambda;\nu\mu}] = R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} A_\sigma - T^\sigma{}_{\mu\nu} A_{\lambda;\sigma},$$

millest Riemanni kõverustensoriks on

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} \quad (5)$$

ja seostuste antisümmeetrilist osa nimetatakse väändetensoriks

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Kuna kõverustensor ehk kõverus on defineeritud tensori kaudu, siis on tegemist invariantse mõõduga ehk ruum kas on või ei ole kõver.

Kõveruse ahendamisel saame sellised suurused nagu Ricci tensor ja Ricci skalaar:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Üldrelatiivsusteoorias avaldub gravitatsioon aegruumi kõverusena. Sellest tulenevalt valitakse seostus selline, et aegruum oleks väänetest vaba:

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}. \quad (8)$$

Meetrilise seostuse(seostuse poolt määratud paralleelnihkel skalaarkorrutis ei muutu) määravad $\frac{n^2(n+1)}{2}$ võrrandit ehk neljamõõtmelise ruumi puhul on meil 40 võrrandit.

Eeldatakse kehtivust meetrilisuse tingimus erinevate indeksite kombinatsioonide suhtes:

$$\begin{aligned} g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha} - g_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} &= 0, \\ g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta} - g_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} &= 0, \\ g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Kombineerime omavahel (8) ja meetrilisuse tingimuse ning saame ÜRT-is kasutatava seostuse - Levi-Civita seostuse

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}), \quad (9)$$

mis on ka sümmeetriline alumiste indeksite suhtes. Edaspidi tähistab väike ringike $^\circ$ Levi-Civita seostust ja sellega seotud suurusi, et eristada teistest seostustest.

Afinset seostust, mis on üldisem, kui Levi-Civita seostus saab väljendada kahe liikme summana (eeldatakse seostuse meetrilisust) :

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} + K^\sigma{}_{\mu\nu},$$

kus $K^\sigma{}_{\mu\nu}$ on kontorsioonitensor, mida saab esitada väändetensorite kaudu (analoogia (9) avaldamisega) [4] :

$$K^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_\nu{}^\sigma{}_\mu + T_\mu{}^\sigma{}_\nu - T^\sigma{}_{\mu\nu}). \quad (10)$$

ÜRT-is aga on see suurus võrdne nulliga, kuna ka väändetensor oli null.

1.2 Tetraadformalism

Peatükid 1.2 ja 1.3 on koostatud allika [4] põhjal, kui just pole viidatud teistmoodi.

Teleparalleelses gravitatsioonis kirjeldatakse aegruumi lineaarse ja meetrilise seostusega, mis on kõverustest vaba koos meetrilise tensori väljaga. Mõlemad on defineeritud dünaamilises tetraadiväljas.

Üheks tuntumaks teleparalleelseks gravitatsiooniks on ÜRT-i teleparalleelne ekvivalent, mis, nagu nimi ütleb, annab ekvivalentse tulemuse ÜRT-iga, kuigi kirjeldamisviis on teistsugune. Mõlemal on samad väljavõrrandid ja meetrika, kuid mõjufunktsionaal on siiski erinev.

ÜRT-is põhitõdemuseks on aja ja ruumi võrdväärne käsitus, mida kirjeldab 4-mõõtmeline meetrika $g_{\mu\nu}$ ja pseudo-Riemanni muutkond M , mille igas punktis p saab defineerida puutujaruumi $T_p M$, mis on tasane, kuigi üldine geomeetria ei pruugi tasane olla. Tähistame aegruumi kuuluvaid suurusi kreeka tähtedega ja puutujaruumi ehk Minkowski ruumi suurusi ladina tähtedega.

Baasivektorid on defineeritud kui koordinaatjoonte puutujavektorid ehk tegemist on holonoomse baasiga.

$$\vec{e}_\mu = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \vec{e}^\mu = dx^\mu. \quad (11)$$

Meetrika avaldub baasivektorite skalaarkorrutisena. [3]

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu. \quad (12)$$

Minkowski ruumi kirjeldab Minkowski meetrika $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, mis on igas aegruumi punktis määratud lokaalse baasi ehk tetraadi $\{\vec{e}_a\}$, mille moodustavad neli lineaarselt sõltumatut vektorit. Vastavalt eelnevale kehtib

$$\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \eta_{ab}. \quad (13)$$

Iga vektori saame arendada kahes baasis: lokaalses baasis $\{\vec{e}_a\}$ ja "globaalses" baasis $\{\vec{e}_\mu\}$. Seega

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu = A^a \vec{e}_a. \quad (14)$$

Ehk seos baaside vahel on

$$\vec{e}_a = e_a^\mu \vec{e}_\mu \quad \text{ja} \quad \vec{e}_\mu = e_\mu^a \vec{e}_a \quad (15)$$

ning kaasbaasi puhul

$$\vec{e}^a = e^a_\mu \vec{e}^\mu \quad \text{ja} \quad \vec{e}^\mu = e^\mu_a \vec{e}^a. \quad (16)$$

Tetraad on ortonormeeritud juhul, kui on täidetud tingimus

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (17)$$

ja vastav pöördseos aegruumi ja puutujaruumi vahel on

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}. \quad (18)$$

Jääb kehtima ka duaalsus.

$$\vec{e}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad \vec{e}^j(\vec{e}_k) = \delta^j_k, \quad (19)$$

$$e^j_\mu e_j^\nu = \delta^\nu_\mu, \quad e^j_\mu e_b^\mu = \delta^j_b. \quad (20)$$

Vektori komponendid teisenevad üleminekul aegruumi ja puutujaruumi vahel vastavalt toodud eeskirjale :

$$A^j = e^j_\mu A^\mu, \quad A^\mu = e_j^\mu A^j. \quad (21)$$

1.3 Spinnseostus

Samuti nagu ÜRT-is muutub TPG-s vektor tema nihutamisel. TPG-s paralleelnihkel määrab komponentide muutuse spinnseostus $\omega^j_{b\mu}$. Analoogselt teostame vektori \vec{A} paralleelnihke infinitesimaalse kauguse dx^μ võrra, siis vastav vektori muutus on dA^j , mille saab esitada komponentide kaudu

$$A^j(x^\mu + dx^\mu) = A^j(x^\mu) + dA^j = A^j(x^\mu) - \omega^j_{b\mu} e^b_\mu. \quad (22)$$

Tetraadbaasis saab samuti analoogselt defineerida kovariantse tuletise [1]

$$A_{j;\mu} = A_{j,\mu} - \omega^c_{j\mu} A_c, \quad A^j_{;\mu} = A^j_{,\mu} + \omega^j_{c\mu} A^c. \quad (23)$$

Kasutame seost (21) ja kontravariantsete vektori komponentide kovariantse tuletise eeskirja ja saame afiinse seostuse panna kirja spinnseostuse kaudu.

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = e_a^\rho \partial_\mu e^a_\nu + e_a^\rho \omega^a_{b\mu} e^b_\nu \quad (24)$$

ning pöördseos

$$\omega^a_{b\mu} = e^a_\nu \partial_\mu e^b_\nu + e^a_\nu \Gamma^\nu_{\rho\mu} e^b_\rho. \quad (25)$$

Kuna Minkowski meetrika on jääv suurus, siis

$$D\eta_{ab} = (\omega^c_{a\mu} \eta_{cb} + \omega^c_{b\mu} \eta_{ca}) dx^\mu = 0, \quad (26)$$

millest järeldub spinnseostuse antisümmeetrilisus kontravariantsete komponentide suhtes

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = -\omega^{ba}{}_{\mu}. \quad (27)$$

Defineerime ka kõverustensori ja väändetensori spinnseostuse kaudu

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \omega^a{}_{b\nu,\mu} - \omega^a{}_{b\mu,\nu} + \omega^a{}_{c\mu}\omega^c{}_{b\nu} - \omega^a{}_{c\nu}\omega^c{}_{b\mu}, \quad (28)$$

$$T^a{}_{\mu\nu} = e^a{}_{\nu,\mu} - e^a{}_{\mu,\nu} + \omega^a{}_{c\mu}e^c{}_{\nu} - \omega^a{}_{c\nu}e^c{}_{\mu}. \quad (29)$$

Kirjutame üldise spinnseostuse väändevaba spinnseostuse $\omega^{\circ}{}^a{}_{bc}$ ja tensori $K^a{}_{bc}$ summana

$$\omega^a{}_{bc} = \omega^{\circ}{}^a{}_{bc} + K^a{}_{bc}. \quad (30)$$

Tensor $K^a{}_{bc}$ on jällegi kontorsioonitensor, mis avaldub puutujaruumi koordinaatide kaudu

$$K^a{}_{bc} = \frac{1}{2}(T_b{}^a{}_c + T_c{}^a{}_b - T^a{}_{bc}). \quad (31)$$

2 DÜNAAMILISED SÜSTEEMID

Peatükk on koostatud allika [2] põhjal, kui just ei ole viidatud vastupidi.

Dünaamiliseks süsteemiks nimetatakse matemaatilist reeglit, mis kirjeldab süsteemi ajalist arengut faasiruumis (või abstraktses ruumis). Dünaamiliste süsteemide meetod sobib hästi suhteliselt lihtsaks kirjeldamisviisiks keeruliste süsteemide dünaamikal nagu näiteks universum.

2.1 Põhimõisted

Paneme kirja vektori(elemendi) olekute ruumis(faasiruumis) kujul $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Siis dünaamilise süsteemi üldkuju avaldub

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (32)$$

kus funktsioon $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ning täpp tähendab ajalist tuletist, kuid antud juhul ei pea aeg olema seotud füüsikalise ajaga. Käsitleme funktsiooni \mathbf{f} kui vektorvälja $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Valime mingi konkreetse punkti \mathbf{x} mingil konkreetsetel ajahetkel t saame leida süsteemi lahendi $\psi(t)$, mida nimetatakse olekuruumi orbiidiks või trajektooriks.

Püsipunktiks nimetatakse punkti \mathbf{x}_0 , kus on täidetud tingimus $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$. Nagu järeldub, nimest püsipunktis asuva süsteemi olek ei muutu. Püsipunktil on kolm põhilist alamliiki.

Püsipunkti nimetatakse stabiilseks, kui tema ümbruses olevad trajektoorid suunduvad antud punkti. Tema vastand on ebastabiilne püsipunkt, mille juhul ümbritsevad trajektoorid suunduvad eemale. Ning kolmandaks liigiks on sadul, mille puhul trajektoorid nii lähenevad kui ka liiguvad eemale. [5]

2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria

Juhul, kui uuritav süsteem pole lineaarne, siis seda saab lineariseerida püsipunktide ümbruses. Selleks süsteemi käitumist määrava funktsiooni \mathbf{f} arendame Tayloriga punkti \mathbf{x}_0 ümbruses.

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) y_j y_k + \dots, \quad (33)$$

kus vektor \mathbf{y} on defineeritud kui $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Lineariseerimisel arvestatakse ainult esimest järku osatuletistega, mille kaudu koostame dünaamilise süsteemi Jacobi maatriksi ehk stabiilsuse maatriksi

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Antud maatriksi omaväärtused püsipunktis \mathbf{x}_0 sisaldavad informatsiooni antud püsipunkti stabiilsuse kohta.

3 Kosmoloogia

Antud töö osas tutvume kosmoloogia valdkonnas kasutatavate võrranditega ja seaduspärade, mida kasutatakse töö põhiosas. Peatükk on ülesehitatud allikal [6], kui pole viidatud teisiti. Valguskiirus võetud võrdseks ühega $c = 1$.

3.1 Põhivõrrandid

Vaatluste põhjal saame teha järelduse, et universum on kiirenevalt paisuv. Antud paisumist kirjeldab mastaabikordaja $A(t)$, mis on defineeritud punanihke kaudu järgnevalt

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{vaadeldud}}}{\lambda_{\text{kiiratud}}} = \frac{A(t_0)}{A(t_e)}, \quad (35)$$

kus t_e footoni kiiramise ajahetk ja t_0 on hetke moment. Mastaabikordaja A kaudu on defineeritud Hubble'i parameeter H , mis kirjeldab universumi paisumise kiirust.

$$H = \frac{\dot{A}}{A}. \quad (36)$$

Gravitatsiooniseadusi kirjeldavad Einsteini võrrandid

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (37)$$

kus $g_{\mu\nu}$ on meetriline tensor ehk meetrika; $R_{\mu\nu}$ ja R on vastavalt Ricci tensor ja skalaar, mis iseloomustab kõverust; $T_{\mu\nu}$ - energia-impulsi tensor. G_N - Newtoni gravitatsioonikonstant ja Λ - kosmoloogiline konstant.

3.2 Materia kui voolis

Kosmoloogias kirjeldatakse materiat ideaalse voolisena, millest järeldub, et energia-impulsi tensor on määratud rõhuga $p(t)$ ja energiatihedusega $\rho(t)$.

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Võrrandis suurus u_μ tähistab ideaalse voolisega kaasaliikuva vaatleja neli-kiirust. Ideaalse voolise puhul on rõhk p ja energia tihedus ρ omavahel seotud seosega

$$p = w\rho, \quad (38)$$

kus w on olekuvõrrandi parameeter, mis määrab millise mateeriavormiga on tegemist.

$$\begin{aligned} \text{kiirgus:} & \quad w = 1/3 \\ \text{tolm:} & \quad w = 0 \\ \text{vaakumi energia:} & \quad w = -1 \end{aligned}$$

Universumi elu jagatakse kolme perioodi, mis määratakse domineeriva materia liigi järgi. Esimeseks perioodil domineerib kiirgus, teisel aga tolmu ning viimasel perioodil domineerib vaakumi energia.

Energia-impulsi jäävusseaduseks nimetatakse energia-impulsi tensorist võetud kovariantset tuletist, mis võrdub nulliga.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (39)$$

millega komponent $\nu = 0$ paisuvas universumis avaldub, kui

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (40)$$

kus kasutame seost (38) ja saame materia jäävusseaduse, mida kasutame edaspidises analüüsis koos seosega (38).

$$\dot{\rho} = -3(1 + w)H\rho \quad (41)$$

3.3 Kosmoloogilised võrrandid

Kosmoloogilised võrrandid tulenevad Einsteini võrranditest. Üldtunnistatuks hetkel on Friedmanni - Lemaitre' - Robertsoni - Walkeri (edaspidi FLRW) meetrikal põhinevad kosmoloogia võrrandid. FLRW meetrika esitatakse sfäärilistes koordinaatides $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ ning joonelement kujul avaldub

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + A^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (42)$$

kus $k = 0, \pm 1$. Kui $k = 1$, siis öeldakse, et universum on sfäärilise geomeetriaga, kui $k = -1$, siis aga hüperboolse ruumi geomeetriaga, ning kui $k = 0$, siis universum on tasane. [2]

Einsteini võrranditest avaldatakse kosmoloogilised võrrandid, mis FLRW meetrikaga avalduvad

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \Lambda, \quad (43)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p + \Lambda. \quad (44)$$

Varem mainitud konstandid Einsteini võrrandites on siin kokku võetud kujul $\kappa^2 = 8\pi G_N$. [2]

3.4 Modifitseeritud kosmoloogilised võrrandid

Töös kasutatavad kosmoloogilised võrrandid on ülesehitatud uuel üldrelatiivsusteoorial, mille toime pannakse kirja taandamatu väände tensori dekompositsiooniga, mis avaldub [1]

$$T_{\mu\nu\rho} = 2\mathcal{T}_1 h_{\mu[\nu} n_{\rho]} + 2\mathcal{T}_2 \varepsilon_{\mu\nu\rho}, \quad (45)$$

kus $\mathcal{T}_1(t)$ on skalaarne funktsioon ja $\mathcal{T}_2(t)$ on pseudoskalaarne funktsioon. Suurus n on aga duaalne kovektorväli vektorväljale, mis on risti ruumi hüperpinnaga. [1]

Kui tegemist on tasase FLRW aegruumiga ($k = 0$), siis

$$\mathcal{T}_1 = H, \quad \mathcal{T}_2 = 0, \quad (46)$$

kui aga ruum on suletud ehk positiivse kõverusega ($k = 1$), siis

$$\mathcal{T}_1 = H, \quad \mathcal{T}_2 = \pm \frac{1}{A}, \quad (47)$$

ning viimast juhtu, kus ruum on avatud ($k = -1$) kirjeldavad väärtused [1]

$$\mathcal{T}_1 = H \pm \frac{1}{A}, \quad \mathcal{T}_2 = 0. \quad (48)$$

Väände tensori dekompositsioonid põhinev gravitatsiooniline osa väljavõrranditest avaldub

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\mu\nu} = & c_a \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^\rho \mathbf{a}_{(\rho} g_{\mu\nu)} - \frac{4}{9} \epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \mathbf{a}^\alpha \mathbf{t}_\mu{}^{\beta\gamma} - \frac{2}{9} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{a}^\rho \mathbf{v}^\sigma + \frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \dot{\nabla}^\rho \mathbf{a}^\sigma \right) + \\ & c_t \left(\frac{2}{3} \mathbf{t}_{\alpha[\beta\gamma]} \mathbf{t}^{\alpha\beta\gamma} g_{\mu\nu} - \frac{4}{3} \mathbf{t}_{\nu[\rho\sigma]} \mathbf{t}_\mu{}^{\rho\sigma} + 2 \dot{\nabla}^\rho \mathbf{t}_{\mu[\nu\rho]} - \frac{2}{3} \mathbf{t}_{\nu[\mu\rho]} \mathbf{v}^\rho + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \mathbf{a}^\alpha \mathbf{t}_\nu{}^{\beta\gamma} \right) + \\ & c_v \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^\rho \mathbf{v}_{(\rho} g_{\mu\nu)} + \frac{4}{3} \mathbf{t}_{\mu[\rho\nu]} \mathbf{v}^\rho + 2 g_{\mu[\nu} \dot{\nabla}^\rho \mathbf{v}_{\rho]} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{a}^\rho \mathbf{v}^\sigma \right), \end{aligned} \quad (49)$$

kus uued suurused avalduvad [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\mu &= T^\nu{}_{\nu\mu}, \\ \mathbf{a}_\mu &= \frac{1}{6} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T^{\nu\rho\sigma}, \\ \mathbf{t}_{\mu\nu\rho} &= T_{(\mu\nu)\rho} + \frac{1}{3} (T^\sigma{}_{\sigma(\mu} g_{\nu)\rho} - T^\sigma{}_{\sigma\rho} g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Nendest \mathbf{v}_μ ja \mathbf{a}_μ on vektor ja pseudovektor, mis mõlemad omavad sõltumatuid komponendid. Tensor $\mathbf{t}_{\mu\nu\rho}$ rahuldab tingimusi [1]

$$\mathbf{t}_{[\mu\nu]\rho} = \mathbf{t}_{(\mu\nu)\rho} = 0, \quad \mathbf{t}^\nu{}_{\nu\mu} = \mathbf{t}^\nu{}_{\mu\nu} = \mathbf{t}_{\mu\nu}{}^\nu. \quad (50)$$

Edaspidi uurime kahte juhtu, mis on kirjeldavad kõverat ruumi. Kui ruum on positiivse kõverusega ($k = 1$) ja negatiivse kõverusega ($k = -1$). Kolmas juht, kus ruum on tasane ($k=0$) ei paku erilist huvi analüüsi suhtes, kuna tegemist on juba uuritud dünaamikaga.

Täpsem võrrandite tuletuskäik on leitav algallikas [1]. Esitan ainult lõpptulemuse. Positiivse kõveruse juht avaldub

$$\kappa^2 \rho = -\frac{9}{2} c_v H^2 + \frac{2c_a}{A^2}, \quad (51)$$

$$\kappa^2 p = 3c_v \left(\dot{H} + \frac{3}{2} H^2 \right) - \frac{2c_a}{3A^2} \quad (52)$$

ja vastavalt negatiivse kõveruse võrrandid:

$$\kappa^2 \rho = -\frac{9}{2} c_v \left(H^2 + \frac{1}{A^2} \right), \quad (53)$$

$$\kappa^2 p = 3c_v \left(\dot{H} + \frac{3}{2} H^2 - \frac{1}{2A^2} \right). \quad (54)$$

Siin c_v ja c_a on konstandid, mis määravad teooria sellest klassist.

4 Dünaamilise süsteemi analüüs

Antud osas tegeleme dünaamilise süsteemi tuletamisega võrranditest (51) kuni (54), süsteemi lahendamise ja tulemuste tõlgendamisega.

4.1 Dünaamilise süsteemi tuletamine

Olemasolevate võrrandite otsene lähendamine tekitab ebamugavaid singulaarsusi. Seetõttu muudavad analüüsi üsna ebameeldivaks, mis tõttu toome sisse uued parameetrid ja avaldame nende kaudu dünaamilise süsteemi. Taoline meetod oli kasutatud artiklis [7].

4.1.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)

Olemasolevad võrrandid normaliseerime jagades süsteemi läbi konstandiga κ^2 ja defineerime uued parameetrid nagu $\kappa_v = c_v/\kappa^2$ ja $\kappa_a = c_a/\kappa^2$.

$$\rho = -\frac{9}{2}\kappa_v H^2 + \frac{2\kappa_a}{A^2}, \quad (55)$$

$$p = 3\kappa_v \left(\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 \right) - \frac{2\kappa_a}{3A^2}. \quad (56)$$

Toome sisse uued koordinaadid α, β . Kuna tiheduse ρ väärtused definitsiooni kohaselt ei saa olla negatiivsed, kuid saavad olla lõpmatud, siis defineerime tiheduse ρ koordinaadi α kaudu:

$$\rho = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (57)$$

Koordinaat α on määratud vahemikus $0 \leq \alpha \leq 1$. Ja β valime nii, et (55) oleks lahendatud. Saame

$$H = \sqrt{\rho \left(-\frac{9}{2}\kappa_v \right)^{-1}} \cos \beta; \quad (58)$$

$$A = \sqrt{\frac{2\kappa_a}{\rho}} \sin^{-1} \beta. \quad (59)$$

Tekivad piirjuhud, kus kui $\beta \rightarrow 0$, siis $A \rightarrow \infty$ ja kui $\beta \rightarrow \pi/2$, siis $H \rightarrow 0$. Leiame koordinaatide ajalised tuletised.

$$\dot{H} = \sqrt{-\frac{2}{9\kappa_v}} \left(\frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)^{3/2}} \cos \beta - \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sin \beta \dot{\beta} \right) \quad (60)$$

$$\dot{A} = \sqrt{2\kappa_a} \left(-\frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{1-\alpha}\alpha^{3/2}} \frac{1}{\sin \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \dot{\beta} \right) \quad (61)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{\alpha}}{(1-\alpha)^2} \quad (62)$$

Asendame olemasolevad koordinaadid parameetrite kaudu võrranditesse (36), (41) ja (56) ning avaldame $\dot{\alpha}$ ja $\dot{\beta}$. Saame tulemuseks

$$\dot{\alpha} = -(1+w) \sqrt{-\frac{2}{\kappa_v}} \alpha^{3/2} \sqrt{1-\alpha} \cos \beta, \quad (63)$$

$$\dot{\beta} = \sqrt{-\frac{2}{\kappa_v}} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}w \right) \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sin \beta. \quad (64)$$

Tegelikult piisab ka kahest võrrandist, kuid kolmandat kasutasin kontrolliks.

4.1.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)

Analoogselt esimese juhuga normaliseerime dünaamilise süsteemi ning saame

$$\rho = -\frac{9}{2}\kappa_v \left(H^2 - \frac{1}{A^2} \right), \quad (65)$$

$$p = 3\kappa_v \left(\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 - \frac{1}{2A^2} \right). \quad (66)$$

Koordinaadid α ja β valime sama loogika järgi. Seos (57) jääb samaks, kuid seoses süsteemi eripärasusega kasutame trigonomeetriliste funktsioonide asemel hüperboolseid. Seoses sellega α piirjuhud peavad paika, kuid β puhul jääb kehtima ainult üks piirjuht. Kui $\beta \rightarrow 0$, siis $A \rightarrow \infty$.

$$H = \sqrt{\rho \left(-\frac{9}{2}\kappa_v \right)^{-1}} \cosh \beta; \quad (67)$$

$$A = \sqrt{\rho^{-1} \left(-\frac{9}{2}\kappa_v \right)} \sinh^{-1} \beta. \quad (68)$$

Avaldame nende ajalised tuletised.

$$\dot{H} = \sqrt{-\frac{2}{9\kappa_v}} \left(\frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}(1-\alpha)^{3/2}} \cosh \beta + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sinh \beta \dot{\beta} \right) \quad (69)$$

$$\dot{A} = \sqrt{-\frac{9\kappa_v}{2}} \left(-\frac{\dot{\alpha}}{2\sqrt{1-\alpha}\alpha^{3/2}} \frac{1}{\sinh \beta} - \frac{\cosh \beta}{\sinh^2 \beta} \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \dot{\beta} \right) \quad (70)$$

Esitame seosed (66), (36) ja (41) uute koordinaatide kaudu ja avaldame $\dot{\alpha}$ ning $\dot{\beta}$.

$$\dot{\alpha} = -(1+w) \sqrt{-\frac{2}{\kappa_v}} \alpha^{3/2} \sqrt{1-\alpha} \cosh \beta \quad (71)$$

$$\dot{\beta} = \sqrt{-\frac{2}{\kappa_v}} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{1}{6} + \frac{w}{2} \right) \sinh \beta \quad (72)$$

Näeme, et võrrandi $\dot{\alpha}$ kuju on säilinud võrreldes $k = 1$ juhuga.

4.2 Süsteemi lahendamine

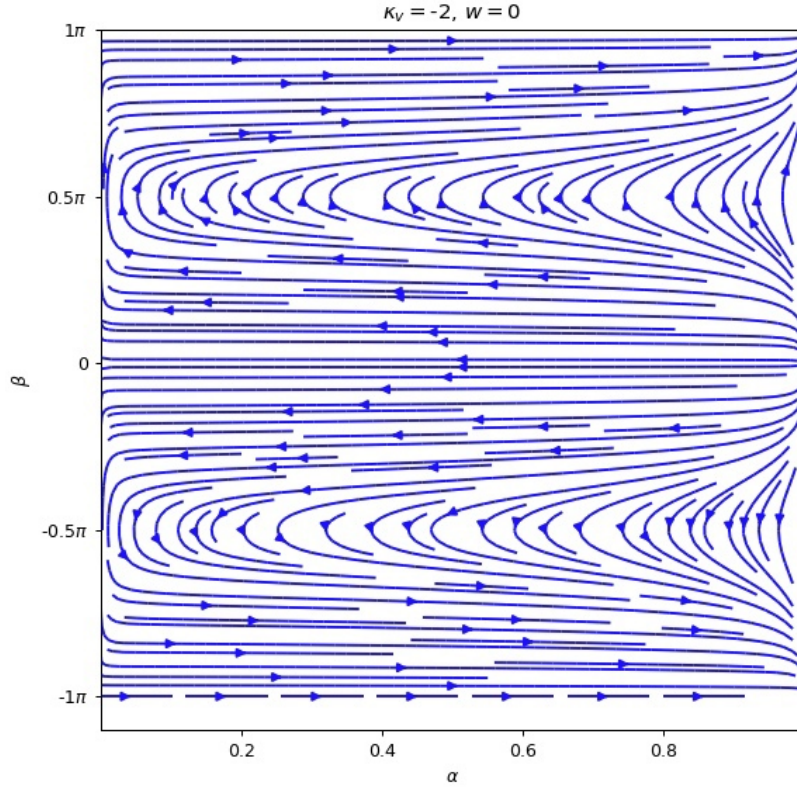
4.2.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)

Võrranditest on näha, et lahendid ei sõltu parameetri κ_a väärtusest, ning ilmselt peab kehtima tingimus $\kappa_v < 0$. Mugavuse mõttes valin parameetri väärtuseks $\kappa_v = -2$. Samuti on näha, et väärtustel $w > -1/3$ on faasiportee alati sama kujuga.

Püsipunktides kehtib tingimus $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, mis on täidetud juhul, kui $\alpha = 0$ sõltumata β väärtusest ehk tegemist on püsisirgega. Vaatleme, aga $\dot{\alpha}$ väärtusi, kui $0 < \alpha < 1$. Näeme, et avaldise märk sõltub vaid koordinaadist β ehk $\dot{\alpha} \approx -\cos \beta$. Juhul, kui $\cos \beta < 0$, siis dünaamika koondub püsisirgest eemale ning kui $\cos \beta > 0$, siis aga püsisirge suunas. Kuid $\dot{\alpha}$ muutuses esineb sõltuvus ka koordinaadist $\dot{\beta}$, mis avaldub

$$\ddot{\alpha} \approx \frac{d}{dt}(-\cos \beta) = \sin \beta \dot{\beta} \approx -\sin^2 \beta \leq 0, \quad (73)$$

mis näitab, et $\cos \beta$ kahaneb, seega liikumine toimub suunas $\cos \beta > 0 \rightarrow \cos \beta < 0$. Ehk β dünaamika läheneb väärtusele, kus α hajub.



Joonis 1. Juhu $k = 1$ faasiportree.

Eraldi tuleb vaadelda veel olukordi $\beta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, kus kehtib $\dot{\beta} = 0$ ning $\cos \beta = \pm 1$. Samas $\dot{\alpha} = 0$ nõuab, et $\alpha = 1$ seal, kus asub $\dot{\beta}$ singulaarsus. Kui aga vaadelda ümbrust $0 < \alpha < 1$, siis üldiselt leiame, et

$$\dot{\alpha} \approx -\cos \beta, \quad (74)$$

$$\dot{\beta} \approx \sin \beta. \quad (75)$$

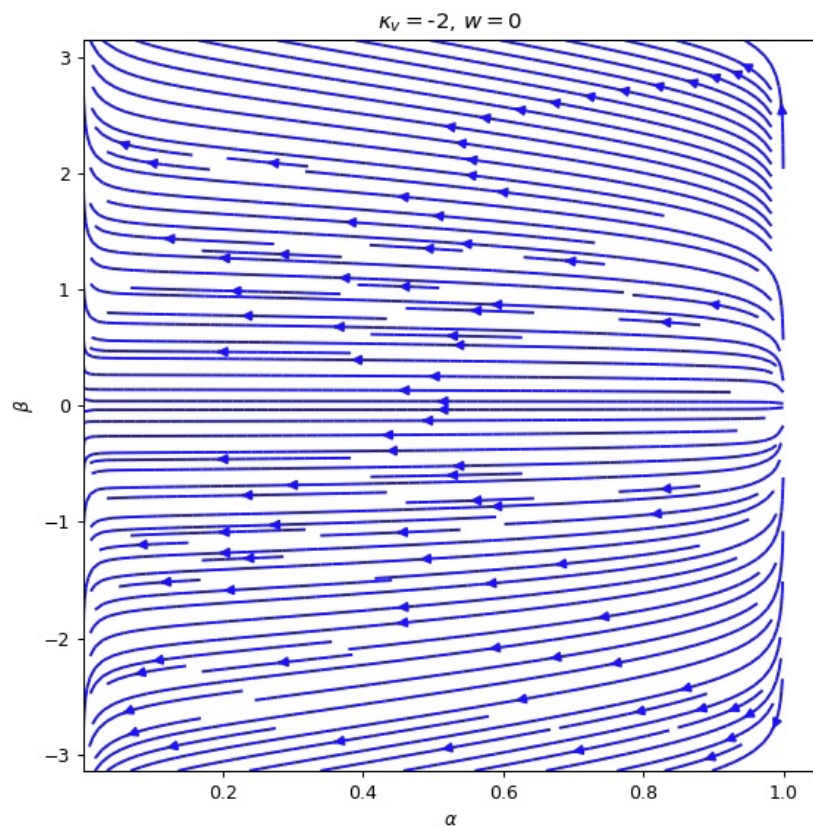
Seega α liigub eemale püsipunktist, kui $\cos \beta = 1$.

$$\ddot{\beta} \approx \frac{d}{dt} \sin \beta = \cos \beta \dot{\beta} \approx \sin \beta \cos \beta \quad (76)$$

Koordinaadi β dünaamika areneb samas suunas, ehk liigub eemale $\sin \beta = 0$. Järelikult $\cos \beta = 1$ on ebastabiilne ja $\cos \beta = -1$ on stabiilne.

Koostan pythoni abil faasiportree, kus $w = 0$ (vaata joonist 1). Faasiportreest on näha kõik varem mainitud.

4.2.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)



Joonis 2. Juhu $k = -1$ faasiportree.

Analoogselt eelmise juhuga saame, et $\alpha = 0$ on püsisirge. Süsteemi kujust näeme, et võrrandid omavad sama kuju juhtudel ($w > -1/3$).

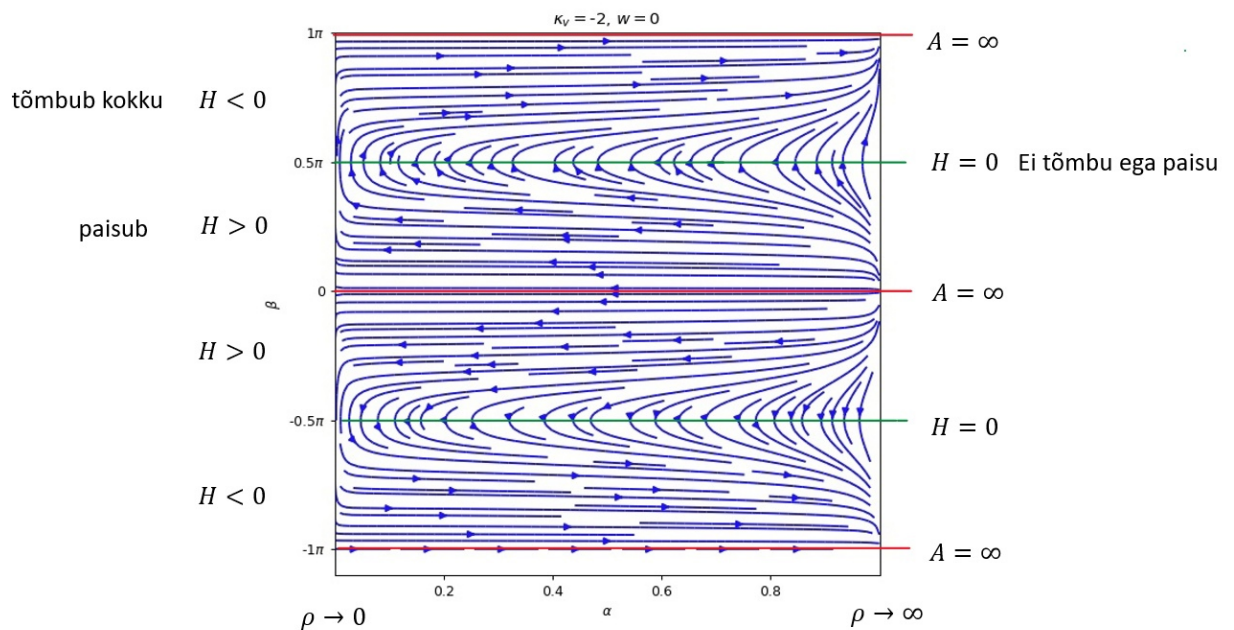
Paneme tähele, et kõik avaldises (72) olevad liikmed on alati positiivsed sõltumata nende sisendist. Kokkuvõttes on avaldis alati negatiivne miinusemärgi pärast. Ehk α on alati kahanev ($\alpha \rightarrow 0$).

Teise avaldise märk sõltub ainult funktsioonist $\sinh \beta$, mis on võrdne nulliga ainult juhul $\beta = 0$ ning vastavalt $\sinh \beta < 0$, $\beta \in \mathbb{R}^-$ ja $\sinh \beta > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Sellest tulenevalt liiguvad lahendid eemale joonest $\beta = 0$.

Eelnevast järeldub, et meil on põhimõtteliselt kaks püsipunkti: $P_1(0, 0)$ ja $P_2(0, 1)$, millest P_1 on sadul ja P_2 - ebastabiilne sõlm, kust lahendid liiguvad eemale. Mida näemegi faasiportreel (joonis 2).

4.3 Tulemuste analüüs

4.3.1 Positiivne kõverus ($k = 1$)



Joonis 3. Juhu $k = 1$ märgistatud faasiportree.

Tuletame meelde piirjuhud, mis on mainitud peatükis 4.1.1 ning anname neile füüsilise sisu.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{Energiatihedus on null.}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \rho(\alpha) = \infty \Rightarrow \text{Energiatihedus on lõpmatu ehk toimub Suur Pauk või kollaps, kui dünaamika sinna suundub.}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} A = \infty, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Lõpmatu paisumine.}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi + \frac{1}{2}} H = 0, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Ei toimu paisumist ega kokkutõmbumist.}$$

Märgime neid faasidiagrammil (joonis 3). Näeme, et lahendid liiguvad Suure Paugu asukohast $(1, 0)$ esialgu universumi paisumise suunas, kus tihedus väheneb kuni jooneni $H = 0$. Sealt alates algab universumi kokkutõmbumine nimega Suur Kokkutõmbumine.

4.3.2 Negatiivne kõverus ($k = -1$)

Siin piirjuhtude alla kuuluvad:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha) = 0 &\Rightarrow \text{Energiatihedus on null.} \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} \rho(\alpha) = \infty &\Rightarrow \text{Energiatihedus on lõpmatu ehk toimub Suur Pauk või} \\ &\text{kollaps, kui dünaamika sinna suundub.} \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} A(\alpha, \beta) = \infty &\Rightarrow \text{Lõpmatu paisumine.} \end{aligned}$$

Seoses sellega, kuidas oli meil defineeritud koordinaat H valemis (67), on meil see suurus alati positiivne ning koordinaadi $|\beta|$ kasvust tuleneb ka Hubble'i parameetri kasv. Näeme, et kõik trajektoorid suunduvad eemale joonest $\beta = 0$, järelikult on meil universum paisuv. Faasidiagrammilt loeme ka, et α on kahanev ehk ka energia tihedus on kahanev.

5 Kokkuvõte

Käesoleva bakalaaurusetöö teoreetilises osas andsime ülevaate teleparalleelsest gravitatsiooniteooriast, tõime ära dünaamiliste süsteemide teooriaga seotud põhimõisted ja vaatasime üle kosmoloogia põhivõrrandid, mis olid vajalikud antud töö kirjutamiseks.

Töö arvutuslikus osas tuletasime uue üldrelatiivsusteooriate klassi kosmoloogilistest võrranditest dünaamilised süsteemid. Vaatluse all olid positiivse kõverusega ($k = 1$) ja negatiivse kõverusega ($k = -1$) kahemõõtmelised dünaamilised süsteemid. Selleks tõime sisse uued koordinaadid α ja β . Saadud dünaamilised süsteemid analüüsisime läbi ning joonestasime faasiportree Pythoni abil.

Töö tähtsamas osas tulemused olid tõlgendatud ja tehtud järeldused. Analüüsi tulemusena nägime, et mudel kirjeldab universumi arengut kvalitatiivselt õigesti, kuid dünaamika on sama, mis üldrelatiivsusteoorias ja ei paku uusi seglitusi vaatlustele.

Viidatud kirjandus

- [1] Manuel Hohmann. Complete classification of cosmological teleparallel geometries. August 2020.
- [2] Sebastian Bahamonde, Christian G. Boehmer, Sante Carloni, Edmund J. Copeland, Wei Fang, and Nicola Tamanini. Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity. *Physics Reports Vol. 775-777 (2018) 1-122*, December 2017.
- [3] Sean M. Carroll. Spacetime and geometry, 2019.
- [4] Ruben Aldrovandi and José Geraldo Pereira. Fundamentals of teleparallel gravity, 2013.
- [5] Steven H. Strogatz and Ronald F. Fox. Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering. 48:93–94, 1995.
- [6] Andrea DeŠimone. Introduction to cosmology and dark matter. *CERN Yellow Rep. School Proc.*, 6:145–180, 2019.
- [7] Manuel Hohmann and Christian Pfeifer. Teleparallel axions and cosmology. *Eur.Phys.J. C81 (2021) no.4, 376*, December 2020.

Tänuavaldused

Olev väga tänulik enda juhendajale tema kannatuse ja abi eest ning kes andis mulle võimaluse tegeleda teadustööga teoreetilise füüsika valdkonnas juba bakalauruse tasemel.

Samuti soovin tänada oma sõpru, kes olid suureks vaimseks tugeks lõputöö kirjutamisel.

II. Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Natali Atamanova**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose
Modifitseeritud teleparalleelse gravitatsiooniteooria uurimine dünaamiliste süsteemide meetodil,
mille juhendaja on Manuel Hohmann,
reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Natali Atamanova

20.08.2021